



数模驱动的滚动轴承动态刚度测试方法与试验研究

李野腾¹, 段纪伟¹, 任智军², 朱永生¹, 洪 军¹

(1. 西安交通大学 现代设计及转子轴承系统教育部重点实验室, 陕西 西安 710049;

2. 西安交通大学 前沿科学技术研究院, 陕西 西安 710049)

摘 要: 牵引电机轴承的动态刚度直接影响轨道交通转子系统的动力学性能与运行平稳性。针对现有测试方法难以兼顾多工况测量与非线性特征提取的问题, 本文提出一种融合实测数据与理论模型的数模联合驱动方法, 用于滚动轴承动态刚度的高精度测试。首先, 基于滚动轴承刚度矩阵解析理论, 建立五自由度拟静力学模型, 系统考虑离心力、陀螺力矩及接触变形等非线性因素; 其次, 自主研制轴承动态刚度测试试验台, 实现连续变载荷工况下轴承位移与受力的高精度同步测量; 然后, 构建融合实测数据与理论模型的参数优化目标函数, 采用智能优化算法辨识轴承结构特性关键参数, 最后由解析模型计算获得轴承动态刚度的精确解。试验结果表明: 轴承动态刚度随转速升高呈现显著的“刚度软化”现象; 轴向动态刚度随轴向载荷增加而明显增大, 而径向动态刚度随径向载荷增加的变化趋势相对较弱。本文方法有效克服了传统线性拟合忽略非线性特征的局限, 为牵引电机转子系统的动力学设计与运行稳定性评估提供了必要的理论依据与试验支撑。

关键词: 牵引电机; 滚动轴承; 动态刚度; 数模驱动; 参数识别

中图分类号: TH133.33; U264.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-128X(2026)01-0021-08

0 引言

滚动轴承是旋转机械中应用最广泛的零部件之一^[1]。在轨道交通领域, 高速动车组与重载列车牵引电机的转子系统多采用高性能轴承支撑, 轴承动态刚度直接影响转子系统的动态特性、振动噪声水平以及整车运行的平稳性^[2-3]。牵引电机轴承的动态刚度包括径向与轴向2个方向的刚度^[4], 对其实施有效测试有助于深入理解轴承在系统中的力学行为, 进而预防系统失稳与异常振动。因此, 发展高精度的轴承动态刚度测试方法具有重要的工程意义。

目前, 轴承刚度测试方法主要可归纳为以下4类:

①锤击法。文献[5]利用锤击激励获取轴承的振动固有频率以识别刚度, 但该方法难以反映时变工况下的刚度特性。②变形法。文献[6]通过坐标变换构建轴承变形表达式并开展试验测试, 但所测结果为绝对位移而非相对位移, 限制了试验精度。③共振法。文献[7]基于共振原理建立轴承组件等效参数识别模型, 并通过简易试验装置测得动刚度, 然而模型未考虑轴承内部结构变化, 难以真实表征实际工况下的动态演化特性。④推力刚度法。文献[8]研制了一种适用于多种组配形式的轴承径向/轴向刚度测试仪器, 通过对背对背组配轴承进行测试获取动态刚度, 但其刚度求解过程基于数据拟合, 忽略了主轴刚度等非线性因素; 文献[9]采用不平衡质量激励施加负载, 并根据刚度定义对载荷-

基金项目: 国家自然科学基金项目 (U23B2097)

通信作者: 朱永生, 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事滚动轴承动力学建模、仿真、测试、诊断及智能轴承技术方面的研究;

E-mail: yszhu@xjtu.edu.cn

引用格式: 李野腾, 段纪伟, 任智军, 等. 数模驱动的滚动轴承动态刚度测试方法与试验研究[J]. 机车电传动, 2026(1): 21-28. DOI:10.13890/j.issn.1000-128X.2026.01.003.

Citation: LI Yeteng, DUAN Jiwei, REN Zhijun, et al. Data and model driven dynamic stiffness testing method for rolling bearings and experimental study[J]. Electric drive for locomotives, 2026(1): 21-28. DOI:10.13890/j.issn.1000-128X.2026.01.003.

位移数据求偏导数获得动态刚度, 但该方法中径向载荷施加与转速控制难以解耦, 限制了多工况测试能力。总体而言, 锤击法与共振法在频响范围与测试条件上存在局限, 而推力刚度法则具备更广的工况适用性。目前, 在动态刚度多工况测量方面的研究已取得一定进展, 如定量测量转速与径向力等工况对刚度的影响^[10], 以及通过引入偏心质量激励原理或集成化设计揭示耦合影响规律并提高测试精度^[11-12]。然而, 传统推力法多对实测载荷-位移数据进行简单的最小二乘拟合, 将斜率作为刚度值, 这种纯数据处理方式本质上忽略了轴承刚度固有的非线性特征。

为弥补测试数据处理环节的非线性特征缺失, 引入轴承内部接触力学理论成为关键。目前, 五自由度拟静力学模型不断演进, 已将离心力、陀螺力矩等动态效应纳入轴承的刚度矩阵计算中^[13], 并进一步提出了考虑高转速特性的多因素耦合模型, 从而能够更准确地反映轴承接触参数及刚度的非线性时变特征^[14]。单纯依赖离散测试数据的传统方法难以实现高精度特征提取, 而纯理论计算又亟待实测工况的验证。因此, 亟须发展一种融合实测数据与理论模型的新方法, 既能充分考虑轴承内部非线性结构特性, 又能实现多工况下的高精度测试。

综上, 针对传统轴承测试方法难以兼顾多工况测量与非线性特征提取的问题, 提出一种数模联合驱动的滚动轴承动态刚度高精度测试方法。本文建立了系统考虑离心力、陀螺力矩及接触变形等非线性因素的五自由度拟静力学模型, 自主研发了多工况轴承动态刚度测试试验台, 并通过融合实测数据与理论模型进行参数识别与刚度求解。本研究有效克服了传统数据拟合忽略非线性特征的局限, 揭示了高速多载荷工况下刚度的演化规律, 为轨道交通牵引电机转子系统的设计提供了重要的理论依据与试验支撑。

1 数模驱动的滚动轴承动态刚度测试方法

1.1 基本原理

为弥补现有轴承动态刚度测试方法的不足, 本文提出一种基于推力刚度法的轴承动态刚度测试方法, 其基本流程如图 1 所示。首先, 从理论建模入手, 建立滚动轴承通用动态刚度计算模型; 其次, 利用滚动轴承刚度测试硬件系统中的径向/轴向加载装置和高精度位移测量模块, 采集测试工况下的实际载荷-位移曲线; 再次, 引入优化算法, 将模型输出的理论载荷-位移曲线与实测曲线进行迭代拟合, 通过曲线的最佳匹配实现对滚动轴承关键结构参数的识别; 最后, 将识别得到的参数代入理论模型, 基于该模型获得轴承的动态刚度。

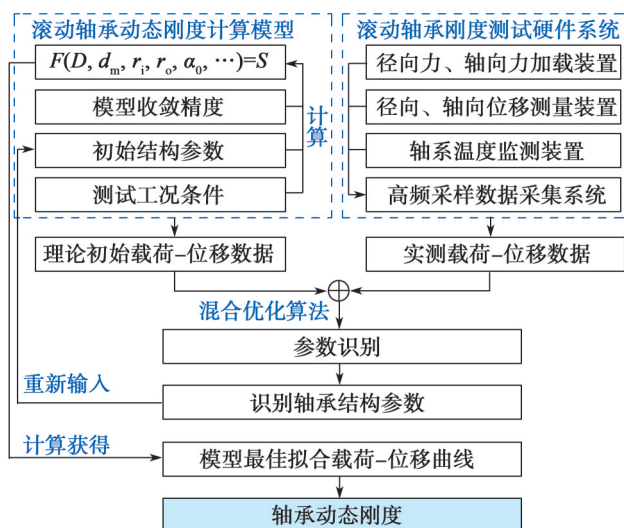


图1 数模驱动的轴承动态刚度测试方法

Fig. 1 Data and model driven dynamic stiffness testing method for bearings

1.2 参数识别方法

参数识别方法的基本原理是通过实测数据与理论模型的对比, 确定一组能够表征测试轴承结构特性的参数值, 使得理论模型的计算结果能够最大限度地拟合实测数据, 从而为后续的数据分析奠定基础, 参数识别流程如图 2 所示。

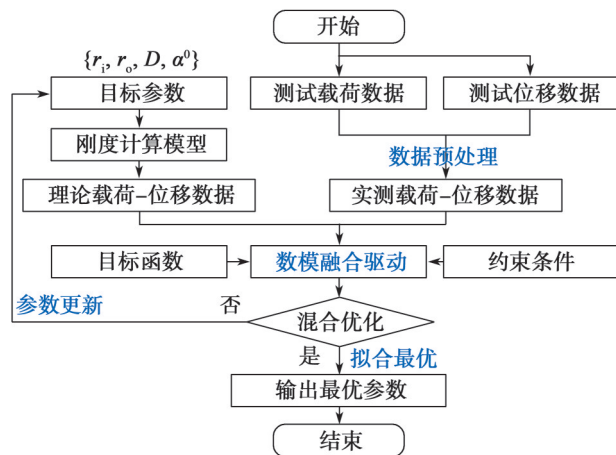


图2 参数识别基本流程

Fig. 2 Flowchart of parameter identification

具体识别步骤为:

① 对轴承动态刚度测试硬件系统采集到的载荷与位移信号进行预处理, 以消除噪声干扰并提高数据质量, 获得实测载荷-位移曲线。将实测载荷数据和初始参数输入滚动轴承动态刚度计算模型, 得到理论载荷-位移曲线。

② 基于滚动轴承动态刚度计算模型, 分析各计算参数的敏感性, 从而确定需要优化的参数, 构建参数优化的目标函数。同时, 设定优化计算的约束条件 (包括目标函数的收敛条件以及各优化参数的取值范围), 并以此对理论和实测载荷-位移曲线开展数模融合

计算。

③ 选取粒子群优化 (particle swarm optimization, PSO) 算法与模式搜索算法相结合的混合优化策略: 先利用 PSO 算法进行全局寻优, 再采用模式搜索对候选最优解进行局部精细修正, 通过迭代计算得到轴承最优结构参数。

④ 评估计算出的参数是否为最佳拟合, 如不是则需调整优化模型的参数初始值并重新计算; 若曲线拟合效果最佳, 则输出最终的参数识别结果。

1.3 滚动轴承动态刚度计算模型

本文基于变量微分法, 建立五自由度拟静力学模型对轴承刚度进行求解与分析, 轴承结构及坐标系统如图3所示。假设轴承外圈固定, 轴承内圈在外力 $F = \{F_x, F_y, F_z, M_y, M_z\}$ 作用下相对外圈发生位移 $d = \{\delta_x, \delta_y, \delta_z, \theta_y, \theta_z\}$ 。其中, F_x, F_y, F_z 分别为沿 x, y, z 轴的作用力; M_y, M_z 分别为绕 y, z 轴的扭矩; $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ 分别为沿 x, y, z 轴的位移; θ_y, θ_z 分别为绕 y, z 轴的角位移。 k 为滚动体编号, ψ_k 为第 k 个滚动体的方位角, $\Delta\psi$ 为相邻滚动体之间的角间隔; Q_{ik}, Q_{ok} 分别为第 k 个滚动体与内、外滚道之间的法向接触载荷; T_{ik}, T_{ok} 分别为第 k 个滚动体与内、外滚道接触处的切向作用力; α_{ik}, α_{ok} 分别为第 k 个滚动体与内、外滚道接触处的接触角。

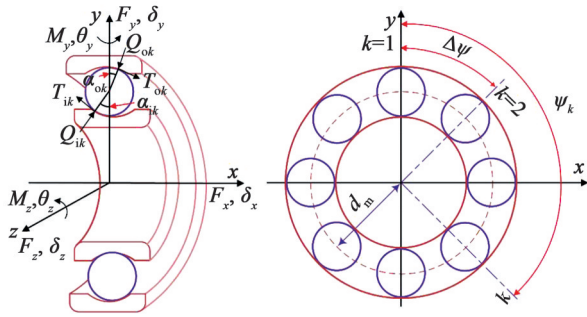


图3 轴承结构及坐标系统

Fig. 3 Bearing structure and coordinate system

当轴承运行转速升高时, 在离心效应作用下滚动体与滚道曲率中心不再共线, 轴承受载前后滚动体与内、外滚道曲率中心相对位置关系如图4所示。

图4中, 外滚道曲率中心 O_o 空间固定, 轴承内滚道曲率中心 O_i 及滚珠中心 O_b 受到外部载荷、内部离心力 F_{ck} 及陀螺力矩 M_{gk} 的共同作用发生位移, 从而引起轴承的内、外接角由 α^0 变为 α_{ik}, α_{ok} 。为描述 O_o, O_i 及 O_b 的几何位置关系, 引入位置参数 A_{1k}, A_{2k} 和 X_{1k}, X_{2k} 。对任意方位角 ψ_k 处, 变化后轴承内外套圈曲率中心的相对轴向位移和径向位移计算公式为:

$$\begin{cases} A_{1k} = BD \sin \alpha + \delta_x - \theta_z R_i \cos \psi_k + \theta_y R_i \sin \psi_k \\ A_{2k} = BD \cos \alpha + \delta_y \cos \psi_k + \delta_z \sin \psi_k \end{cases} \quad (1)$$

式中: BD 表示轴承未受载时内、外滚道沟曲率中心之间的初始几何距离。

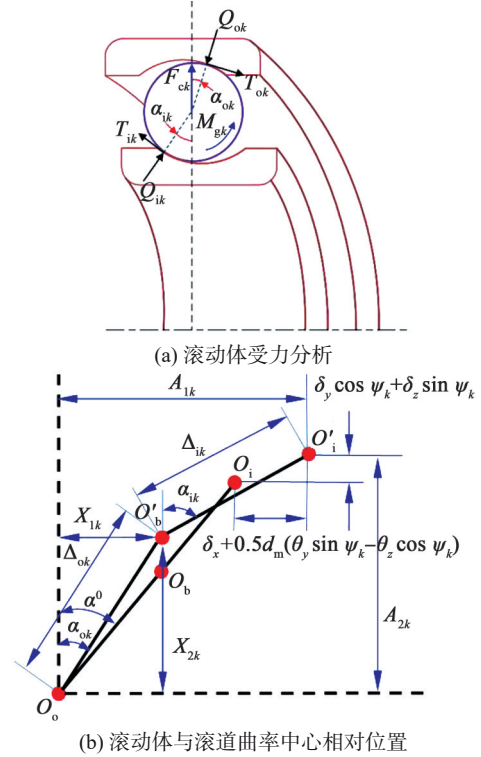


图4 滚动体受力分析及滚动体与滚道曲率中心相对位置

Fig. 4 Force analysis of rolling elements and relative positions of curvature centers of rolling elements and raceways

如图4(a)所示, 任意角位置 $\psi_k (\psi_k = 2\pi(2k-1)/Z)$ 处, 轴承内部内、外接角度的正余弦表达式为:

$$\begin{cases} \sin \alpha_{ik} = \frac{A_{1k} - X_{1k}}{\Delta_{ik}}, & \cos \alpha_{ik} = \frac{A_{2k} - X_{2k}}{\Delta_{ik}} \\ \sin \alpha_{ok} = \frac{X_{1k}}{\Delta_{ok}}, & \cos \alpha_{ok} = \frac{X_{2k}}{\Delta_{ok}} \end{cases} \quad (2)$$

式中: Δ_{ik} 与 Δ_{ok} 分别表示第 k 个滚动体中心与内、外滚道沟曲率中心之间的几何距离; $\Delta_{ik} = (f_i - 0.5)D + \delta_{ik}$, $\Delta_{ok} = (f_o - 0.5)D + \delta_{ok}$; f_i, f_o 分别为内、外圈沟道曲率半径系数。

对于任何角位置处 ψ_k 的滚珠, 其滚珠局部几何平衡方程组为:

$$\begin{cases} \text{Eq}_{1k} = (A_{1k} - X_{1k})^2 + (A_{2k} - X_{2k})^2 - [(f_i - 0.5)D + \delta_{ik}]^2 \\ \text{Eq}_{2k} = X_{1k}^2 + X_{2k}^2 - [(f_o - 0.5)D + \delta_{ok}]^2 \end{cases} \quad (3)$$

根据图4(b), 能够获得轴承局部滚珠在水平及垂直方向上的力学平衡方程组为:

$$\begin{cases} \text{Eq}_{3k} = Q_{ik} \sin \alpha_{ik} - T_{ik} \cos \alpha_{ik} - Q_{ok} \sin \alpha_{ok} + T_{ok} \cos \alpha_{ok} \\ \text{Eq}_{4k} = Q_{ik} \cos \alpha_{ik} + T_{ik} \sin \alpha_{ik} - Q_{ok} \cos \alpha_{ok} - T_{ok} \sin \alpha_{ok} + F_{ck} \end{cases} \quad (4)$$

根据 Hertz 点接触理论可得 Q_{ik} 和 Q_{ok} 的计算公式如下:

$$\begin{cases} Q_{ik} = K_{ik} \delta_{ik}^{1.5} \\ Q_{ok} = K_{ok} \delta_{ok}^{1.5} \end{cases} \quad (5)$$

式中: K_{ik}, K_{ok} 分别为球-内滚道及球-外滚道接触表面的弹性变形系数。

此外, T_{ik}, T_{ok} 分别为球-内滚道及球-外滚道摩擦

力, 具体可表示为:

$$\left. \begin{aligned} T_{ik} &= \frac{\lambda_{ik} M_{gk}}{D} \\ T_{ok} &= \frac{\lambda_{ok} M_{gk}}{D} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中: 基于 Jones-Harris 模型的外滚道控制假设 $\lambda_{ik}=0$ 且 $\lambda_{ok}=2$; M_{gk} 为陀螺力矩。

此外, 滚珠的离心力 F_{ck} 和陀螺力矩 M_{gk} 可以表示为^[15]:

$$\left. \begin{aligned} F_{ck} &= \frac{1}{2} m d_m \omega_i^2 (\omega_m / \omega_i)_k^2 \\ M_{gk} &= J \omega_i^2 (\omega_m / \omega_i)_k (\omega_b / \omega_i)_k \sin \beta_k \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中: J 、 m 分别为滚动体转动惯量与质量; ω_b 为滚动体自转速度; ω_m 为滚动体公转速度; ω_i 为内圈角速度; β_k 为滚动体姿态角。

式(6)可根据轴承内、外接触区纯滚动理论计算获取^[15], 此处不再赘述。

在完成轴承内部滚珠局部几何和力学平衡方程建立的基础上, 需进一步针对轴承套圈建立整体平衡方程。由外圈固定条件可对轴承内圈建立五自由度力学平衡方程:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \sum_1^Z F_{xk}, \quad F_{xk} = Q_{ik} \sin \alpha_{ik} - T_{ik} \cos \alpha_{ik} \\ F_y &= \sum_1^Z F_{yk}, \quad F_{yk} = (Q_{ik} \cos \alpha_{ik} + T_{ik} \sin \alpha_{ik}) \cos \psi_k \\ F_z &= \sum_1^Z F_{zk}, \quad F_{zk} = (Q_{ik} \cos \alpha_{ik} + T_{ik} \sin \alpha_{ik}) \sin \psi_k \\ M_y &= \sum_1^Z M_{yk}, \quad M_{yk} = \left[\frac{d_m}{2} (Q_{ik} \sin \alpha_{ik} - T_{ik} \cos \alpha_{ik}) \right] \sin \psi_k \\ M_z &= \sum_1^Z M_{zk}, \quad M_{zk} = \left[-\frac{d_m}{2} (Q_{ik} \sin \alpha_{ik} + T_{ik} \cos \alpha_{ik}) \right] \cos \psi_k \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

至此, 上述模型共建立了滚珠局部方程 ($4 \times Z$ 个) 及套圈全局平衡方程 (5 个)。该非线性方程组可通过 Newton-Raphson 法进行迭代计算。该模型充分考虑了轴承内部滚动体高速状态下的惯性力作用, 可用于联合载荷作用下滚动轴承动态接触角、接触载荷等的计算。

在上述五自由度理论模型的基础上, 为进一步确定不同载荷及工况条件下滚动轴承刚度的变化规律, 需要针对滚动轴承刚度矩阵进行理论推导。滚动轴承

是典型的多自由度非线性系统。根据多自由度非线性系统刚度的定义, 滚动轴承的刚度矩阵可表示为套圈所受外力 $\mathbf{F} = \{F_x, F_y, F_z, M_y, M_z\}$ 对其相对位移 $\mathbf{d} = \{\delta_x, \delta_y, \delta_z, \theta_y, \theta_z\}$ 的偏微分形式^[16], 如式(9)。

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial \delta_x} & \frac{\partial F_x}{\partial \delta_y} & \frac{\partial F_x}{\partial \delta_z} & \frac{\partial F_x}{\partial \theta_y} & \frac{\partial F_x}{\partial \theta_z} \\ \frac{\partial F_y}{\partial \delta_x} & \frac{\partial F_y}{\partial \delta_y} & \frac{\partial F_y}{\partial \delta_z} & \frac{\partial F_y}{\partial \theta_y} & \frac{\partial F_y}{\partial \theta_z} \\ \frac{\partial F_z}{\partial \delta_x} & \frac{\partial F_z}{\partial \delta_y} & \frac{\partial F_z}{\partial \delta_z} & \frac{\partial F_z}{\partial \theta_y} & \frac{\partial F_z}{\partial \theta_z} \\ \frac{\partial M_y}{\partial \delta_x} & \frac{\partial M_y}{\partial \delta_y} & \frac{\partial M_y}{\partial \delta_z} & \frac{\partial M_y}{\partial \theta_y} & \frac{\partial M_y}{\partial \theta_z} \\ \frac{\partial M_z}{\partial \delta_x} & \frac{\partial M_z}{\partial \delta_y} & \frac{\partial M_z}{\partial \delta_z} & \frac{\partial M_z}{\partial \theta_y} & \frac{\partial M_z}{\partial \theta_z} \end{bmatrix} \quad (9)$$

根据轴承建模过程中包含的两类平衡方程, 即滚珠局部平衡方程和套圈全局平衡方程, 为实现轴承刚度矩阵的精确计算, 避免数值差分法计算轴承刚度矩阵带来的数值稳定性问题, 可根据轴承内部变量间的关系选取一定数量的中间变量辅助计算^[17]。

轴承的刚度矩阵可通过选取中间变量 $\mathbf{v}_k = \{X_{1k}, X_{2k}, \delta_{ik}, \delta_{ok}, A_{1k}, A_{2k}\}$ 表示为轴承所受外力向量 $\mathbf{F} = \{F_x, F_y, F_z, M_y, M_z\}$ 对中间变量的偏微分与中间变量对全局位移向量 $\mathbf{d} = \{\delta_x, \delta_y, \delta_z, \theta_y, \theta_z\}$ 的偏微分之积, 如式(10)。

$$[\mathbf{K}]_{5 \times 5} = \sum_1^Z \left[\begin{array}{c} \frac{\partial F_{xk}}{\partial v_k} \\ \frac{\partial F_{yk}}{\partial v_k} \\ \frac{\partial F_{zk}}{\partial v_k} \\ \frac{\partial M_{yk}}{\partial v_k} \\ \frac{\partial M_{zk}}{\partial v_k} \end{array} \right]_{5 \times 6} \times \left[\begin{array}{ccccc} \frac{\partial v_k^T}{\partial \delta_x} & \frac{\partial v_k^T}{\partial \delta_y} & \frac{\partial v_k^T}{\partial \delta_z} & \frac{\partial v_k^T}{\partial \theta_y} & \frac{\partial v_k^T}{\partial \theta_z} \end{array} \right]_{6 \times 5} \quad (10)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{xk}}{\partial v_k} &= \frac{\partial Q_{ik}}{\partial v_k} \sin \alpha_{ik} + Q_{ik} \frac{\partial \sin \alpha_{ik}}{\partial v_k} - \frac{\partial T_{ik}}{\partial v_k} \cos \alpha_{ik} - T_{ik} \frac{\partial \cos \alpha_{ik}}{\partial v_k} \\ \frac{\partial F_{yk}}{\partial v_k} &= \left(\frac{\partial Q_{ik}}{\partial v_k} \cos \alpha_{ik} + Q_{ik} \frac{\partial \cos \alpha_{ik}}{\partial v_k} + \frac{\partial T_{ik}}{\partial v_k} \sin \alpha_{ik} + T_{ik} \frac{\partial \sin \alpha_{ik}}{\partial v_k} \right) \cos \psi_k \\ \frac{\partial F_{zk}}{\partial v_k} &= \left(\frac{\partial Q_{ik}}{\partial v_k} \cos \alpha_{ik} + Q_{ik} \frac{\partial \cos \alpha_{ik}}{\partial v_k} + \frac{\partial T_{ik}}{\partial v_k} \sin \alpha_{ik} + T_{ik} \frac{\partial \sin \alpha_{ik}}{\partial v_k} \right) \sin \psi_k \\ \frac{\partial M_{yk}}{\partial v_k} &= \left[\frac{d_m}{2} \left(\frac{\partial Q_{ik}}{\partial v_k} \sin \alpha_{ik} + Q_{ik} \frac{\partial \sin \alpha_{ik}}{\partial v_k} - \frac{\partial T_{ik}}{\partial v_k} \cos \alpha_{ik} - T_{ik} \frac{\partial \cos \alpha_{ik}}{\partial v_k} \right) \right] \sin \psi_k \\ \frac{\partial M_{zk}}{\partial v_k} &= \left[-\frac{d_m}{2} \left(\frac{\partial Q_{ik}}{\partial v_k} \sin \alpha_{ik} + Q_{ik} \frac{\partial \sin \alpha_{ik}}{\partial v_k} + \frac{\partial T_{ik}}{\partial v_k} \cos \alpha_{ik} + T_{ik} \frac{\partial \cos \alpha_{ik}}{\partial v_k} \right) \right] \cos \psi_k \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_k^T}{\partial \delta_x} & \frac{\partial v_k^T}{\partial \delta_y} & \frac{\partial v_k^T}{\partial \delta_z} & \frac{\partial v_k^T}{\partial \theta_y} & \frac{\partial v_k^T}{\partial \theta_z} \end{bmatrix}_{6 \times 5} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_{1k}}{\partial A_{1k}} & \frac{\partial X_{1k}}{\partial A_{2k}} \\ \frac{\partial X_{2k}}{\partial A_{1k}} & \frac{\partial X_{2k}}{\partial A_{2k}} \\ \frac{\partial \delta_{ik}}{\partial A_{1k}} & \frac{\partial \delta_{ik}}{\partial A_{2k}} \\ \frac{\partial \delta_{ok}}{\partial A_{1k}} & \frac{\partial \delta_{ok}}{\partial A_{2k}} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{1k}}{\partial \delta_x} & \frac{\partial A_{1k}}{\partial \delta_y} & \frac{\partial A_{1k}}{\partial \delta_z} & \frac{\partial A_{1k}}{\partial \theta_y} & \frac{\partial A_{1k}}{\partial \theta_z} \\ \frac{\partial A_{2k}}{\partial \delta_x} & \frac{\partial A_{2k}}{\partial \delta_y} & \frac{\partial A_{2k}}{\partial \delta_z} & \frac{\partial A_{2k}}{\partial \theta_y} & \frac{\partial A_{2k}}{\partial \theta_z} \end{bmatrix}_{2 \times 5} \quad (12)$$

其中,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial A_{1k}}{\partial \delta_x} & \frac{\partial A_{1k}}{\partial \delta_y} & \frac{\partial A_{1k}}{\partial \delta_z} & \frac{\partial A_{1k}}{\partial \theta_y} & \frac{\partial A_{1k}}{\partial \theta_z} \\ \frac{\partial A_{2k}}{\partial \delta_x} & \frac{\partial A_{2k}}{\partial \delta_y} & \frac{\partial A_{2k}}{\partial \delta_z} & \frac{\partial A_{2k}}{\partial \theta_y} & \frac{\partial A_{2k}}{\partial \theta_z} \end{bmatrix}_{2 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{d_m}{2} \sin \psi_k & -\frac{d_m}{2} \cos \psi_k \\ 0 & \cos \psi_k & \sin \psi_k & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 5} \quad (13)$$

在求解中间变量 $v_k = \{X_{1k}, X_{2k}, \delta_{ik}, \delta_{ok}, A_{1k}, A_{2k}\}$ 对位移矢量 $d = \{\delta_x, \delta_y, \delta_z, \theta_y, \theta_z\}$ 的偏导数过程中, 涉及的变量 $\{X_{1k}, X_{2k}, \delta_{ik}, \delta_{ok}\}$ 与 $\{A_{1k}, A_{2k}\}$ 由隐式方程组(3)和方程组(4)相互联系。在求解时, 需通过隐式微分运算方法求解, 具体如式(14)。

$$\frac{\partial X_{1k}}{\partial A_{1k}} = -\frac{1}{J_k} \frac{\partial (Eq_{1k}, Eq_{2k}, Eq_{3k}, Eq_{4k})}{\partial (X_{1k}, X_{2k}, \delta_{ik}, \delta_{ok})} \quad (14)$$

式(14)中, $Eq_{1k} (k=1, 2, 3, 4)$ 表示隐式方程组(3)和方程组(4), 行列式 J_k 可以表示如式(15)。

$$J_k = \frac{\partial (Eq_{1k}, Eq_{2k}, Eq_{3k}, Eq_{4k})}{\partial (X_{1k}, X_{2k}, \delta_{ik}, \delta_{ok})} \quad (15)$$

经过上述分析, 可通过中间变量的求解获得完整的轴承刚度矩阵表达式。由滚珠局部方程的迭代计算式(16)与套圈全局平衡方程的迭代计算式(17)求解。

$$(\varepsilon_k)^{i+1} = (\varepsilon_k)^i - J_k^{-1} (\varepsilon_k^i) \times \zeta (\varepsilon_k^i) \quad (16)$$

式中: J_k 为上述滚珠平衡方程组 Eq_k 对局部变量 $\varepsilon_k = [X_{1k}, X_{2k}, \delta_{ik}, \delta_{ok}]^T$ 的雅克比矩阵; 上标 i 为第 i 次迭代运算; ζ 为滚珠局部平衡方程组的残差 (用于收敛条件的判断)。

$$d^{j+1} = d^j + K^{-1} (d^j) \times \Omega (d^j) \quad (17)$$

式中: K 为滚动轴承刚度矩阵; 上标 j 代表第 j 次迭代运算; Ω 为套圈全局平衡方程组的残差 (用于收敛条件的判断)。

至此, 轴承动态刚度分析模型建立完成, 为后续

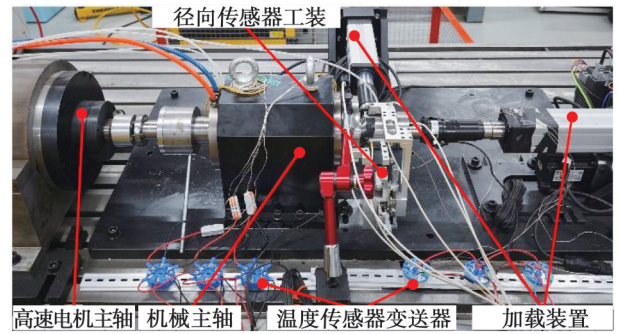
基于数模驱动的动态刚度精确求解方法提供了理论依据, 构建了所需的数学模型。

2 数模驱动的轴承动态刚度试验研究

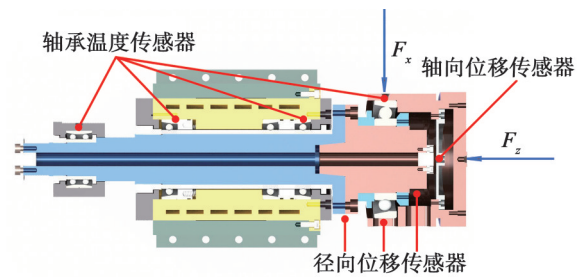
2.1 试验台设计

本文根据上述测试方法的基本流程以及推力法刚度测试原理, 搭建了轴承动态刚度测试试验台。该试验台可通过径向力、轴向力加载系统在线调控对试验轴承进行连续加载, 以模拟不同工况的试验条件。对于加载后的轴承内外圈相对位移, 轴向位移通过测量垫直接测量, 径向位移则通过多点位测量并进行补偿计算得出。

轴承动态刚度测试试验台布局如图5所示, 试验台主体包括1个高速电机主轴、1个试验轴承支撑轴系、若干个可替换的轴承转接模块、试验轴承、1套径向测量装置、1个径向力加载装置、1套轴向测量装置、1个轴向力加载装置、1个浮动轴承座 (载荷加载结构)、若干个温度传感器、1个转速传感器、多通道数据采集系统及计算机。



(a) 试验台实物图



(b) 试验台示意图

图5 轴承动态刚度测试试验台

Fig. 5 Test rig for dynamic stiffness testing for bearings

径向位移补偿计算公式为

$$\frac{a}{a+b} = \frac{\Delta x_3 - \Delta x_2}{\Delta x_3 - \Delta x_1} \quad (18)$$

式中: a 、 b 为传感器之间的距离; Δx_3 为内圈测点2所测数据; Δx_1 为内圈测点1所测数据; Δx_2 为试验轴承内圈补偿位移; 5个参数具体如图6所示。

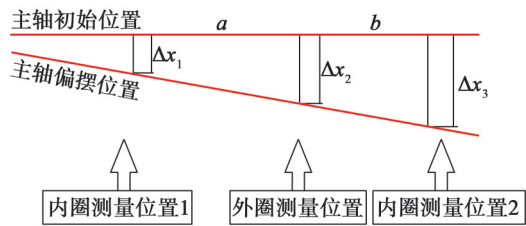


图 6 径向位移测量示意图
Fig. 6 Radial displacement measurement

本文采用某型号轴承开展联合载荷作用下轴承动态刚度变化规律的研究，轴承具体结构参数如表 1 所示。

2.2 轴向载荷对轴向动态刚度的影响

在研究轴向载荷对轴承动态刚度的影响时，试验轴承需保持恒定转速，同时轴承需要一定的预紧力。本文研究的工况条件为：初始预紧力 1 000 N，轴向载荷变化

表 1 轴承结构参数
Table 1 Structural parameters of bearing

轴承结构参数	参数值	轴承结构参数	参数值
内滚道曲率半径 r_i /mm	8.14	外滚道曲率半径 r_o /mm	7.92
内沟底圆直径 d_i /mm	69.787	外沟底圆直径 d_o /mm	100.107
滚珠直径 D /mm	15.081	节圆直径 d_m /mm	85
滚珠个数 Z	13	初始接触角/(°)	13~17

范围为 1 200~2 500 N。在 4 种不同转速下分别开展试验，4 组试验轴承转速分别为 5 000 r/min、6 000 r/min、7 000 r/min、8 000 r/min。根据前述求解方法，首先将初始参数输入到刚度求解模型中，再根据试验轴向载荷-位移曲线开展参数识别，最终获得理论最优载荷-位移曲线及最优结构参数值，如表 2 所示。

表 2 轴承初始参数与识别参数对比

Table 2 Comparison of initial parameters and identified parameters of bearing

轴承结构参数	初始值	识别值	误差
内滚道曲率半径 r_i /mm	8.140 0	8.123 7	-0.016 3
外滚道曲率半径 r_o /mm	7.920 0	7.884 6	-0.035 4
内沟底圆直径 d_i /mm	69.787 0	69.968 9	0.181 9
外沟底圆直径 d_o /mm	100.107 0	100.031 1	-0.075 9
滚珠直径 D /mm	15.081 0	15.010 4	-0.070 6
节圆直径 d_m /mm	85.000 0	84.575 0	-0.425 0
滚珠个数 Z	13	-	-
初始接触角 α /(°)	13~17	14.397 3	-

识别值与初始值的偏离误差均小于 1%，证明了该辨识方法在小样本数据下的可靠性。将所得到的最优结构参数解代入所建立的轴承动态刚度求解模型中，得到对应转速下的轴承轴向刚度随轴向载荷变化曲线，如图 7 所示。

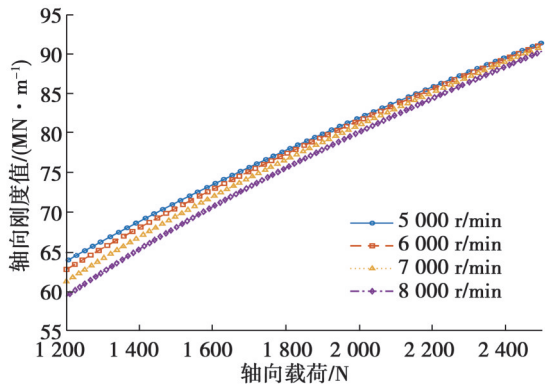


图 7 不同转速下轴向动态刚度随轴向载荷变化趋势
Fig. 7 Variation of axial dynamic stiffness with axial load at different speeds

由图 7 可以看出，轴承轴向动态刚度值总体随轴向载荷的增大而增大；轴承在相同载荷、不同转速下，转速的增加会导致轴向动态刚度降低，且该降低幅度随着轴向载荷的增大有所减小。从机理角度分析，轴

向动态刚度随转速与载荷的变化本质上是轴承内部几何学与力学状态重新平衡的结果。随着转速升高，滚动体受到的离心力增大，导致滚动体向外圈挤压，使得轴承内圈接触角 α_i 减小、外圈接触角 α_o 增大。由于轴向刚度主要取决于接触角在轴向分量的贡献，内圈接触角的减小直接削弱了轴承抵抗轴向位移的能力，在宏观上表现为“刚度软化”，证明了高转速下离心效应对内部载荷再分配的影响。鉴于轴向载荷的增加能显著提升高转速工况下的轴承动态刚度，在工程应用中，建议针对高速轴承适当提高预紧力，以确保系统的稳定性。

2.3 径向载荷对径向动态刚度的影响

在研究径向载荷对轴承径向动态刚度的影响时，试验轴承需保持恒定转速且预紧力相同的情况下，通过施加连续增加的径向载荷来研究径向刚度的变化。本文研究的工况条件为：初始预紧力 3 500 N，径向载荷变化范围为 0~1 000 N。在 4 种不同转速下分别开展试验，4 组试验轴承转速分别为 5 000 r/min、6 000 r/min、7 000 r/min、8 000 r/min。将前文识别后的参数代入刚度分析模型中，得到径向动态刚度随径向载荷变化的曲线，具体如图 8 所示。

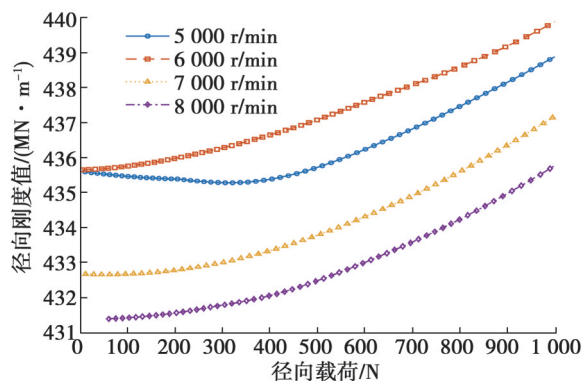


图8 不同转速下径向动态刚度随径向载荷变化趋势

Fig. 8 Variation of radial dynamic stiffness with radial load at different speeds

由图8可知,从整体趋势看,恒定转速、恒定轴向载荷下轴承径向刚度随径向载荷的增大而增大,但增大的幅度非常小;相同径向载荷与轴向载荷下,径向动态刚度随转速的增加有所降低,此外图8中在5 000 r/min工况下径向刚度反常。经过分析,其原因可能是该转速下径向加载过程中测试系统与被测轴承发生耦合,并在该转速工况下发生了共振或次共振现象,从而造成了测量误差及振动的增加,进一步导致试验结果发生偏移。在后续试验研究中,需要针对测试系统可能存在的共振行为进行深入研究。

3 结论

本研究提出了一种数模联合驱动的滚动轴承动态刚度高精度测试方法,并结合理论模型与试验数据,研究了滚动轴承动态刚度变化规律。主要结论如下:

①所提方法将实测载荷-位移数据与滚动轴承五自由度拟静力学模型相结合,并通过参数识别实现模型与试验数据的匹配,能够有效表征滚动轴承动态刚度的非线性变化特征,弥补了传统线性拟合方法难以反映内部接触状态演化规律的不足。

②试验结果表明,滚动轴承动态刚度随转速升高呈现明显的“刚度软化”现象。其中,轴向动态刚度随轴向载荷增加而明显增大,而径向动态刚度随径向载荷增加的变化相对较弱,说明不同方向载荷对动态刚度的影响存在明显差异。

③针对轨道交通牵引电机的实际工程应用,建议在牵引电机转子系统设计与维护中,对运行转速较高的电机轴承适当提高初始预紧力以抵消高速运行带来的“刚度软化”效应,确保整车运行的平稳性与系统防失稳能力。

参考文献:

[1] 郭策, 蒋书运, 孙庆鸿, 等. 高速切削机床主轴轴承的研究与发展[J]. 机床与液压, 2002(6): 11-13.
GUO Ce, JIANG Shuyun, SUN Qinghong, et al. Research

and development of high-speed cutting machine tool spindle bearings[J]. Machine tool & hydraulics, 2002(6): 11-13.

[2] 汪航, 吴昀璞, 陈建华, 等. 基于半监督少样本学习的高速列车故障诊断方法[J]. 机车电传动, 2025(5): 73-83.

WANG Hang, WU Yunpu, CHEN Jianhua, et al. A fault diagnosis method for high-speed trains based on semi-supervised few-shot learning[J]. Electric drive for locomotives, 2025(5): 73-83.

[3] 杨岗, 卫昱乾, 李芾. 基于特征融合的牵引电机轴承声学故障诊断[J]. 机车电传动, 2023(2): 103-112.

YANG Gang, WEI Yuqian, LI Fu. Acoustic fault diagnosis of traction motor bearing based on fusion feature[J]. Electric drive for locomotives, 2023(2): 103-112.

[4] 李建栋. 机床主轴轴运行刚度理论分析及测试技术研究[D]. 西安: 西安交通大学, 2019.

LI Jiandong. Theoretical analysis and testing technology research on axial running stiffness of machine tool spindle [D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2019.

[5] KRAUS J, BLECH J J, BRAUN S G. In situ determination of rolling bearing stiffness and damping by model analysis [J]. Journal of vibration and acoustics, 1987, 109(3): 235-240.

[6] 方兵, 张雷, 曲兴田, 等. 角接触球轴承刚度理论计算与实验[J]. 吉林大学学报(工学版), 2012, 42(4): 840-844.

FANG Bing, ZHANG Lei, QU Xingtian, et al. Theoretical and experimental research of stiffness of angular contact ball bearing[J]. Journal of Jilin university(engineering and technology edition), 2012, 42(4): 840-844.

[7] 芮红锋, 胡小秋, 郭丹枫. 角接触球轴承动态特性参数测试方法[J]. 振动与冲击, 2013, 32(8): 88-90.

RUI Hongfeng, HU Xiaoqi, GUO Danfeng. Measurement method for dynamic characteristic parametric identification of angular contact ball bearings[J]. Journal of vibration and shock, 2013, 32(8): 88-90.

[8] 吕赛赛, 胡英贝, 高奋武, 等. 轴承动态刚度测量方法及测量设备研究[J]. 制造技术与机床, 2023(4): 121-125.

LYU Saisai, HU Yingbei, GAO Fenwu, et al. Research on measurement method and equipment of dynamic stiffness of bearing[J]. Manufacturing technology & machine tool, 2023 (4): 121-125.

[9] 李纯洁. 机床用角接触球轴承动静刚度测试研究[D]. 西安: 西安交通大学, 2013.

LI Chunjie. Research on dynamic and static stiffness test of angular contact ball bearings for machine tools[D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2013.

[10] TIAN S L, WANG Z W, ZHAO X X, et al. Modelling and testing of the dynamic support stiffness of assembled bearings in motorized spindles[J]. Journal of mechanical science and technology, 2024, 38(6): 2717-2724.

[11] LUO H T, FU J, YU C S, et al. Numerical simulation and experimental testing of dynamic stiffness of angular contact

- ball bearing[J]. Advances in mechanical engineering, 2018, 10(9): 1-14.
- [12] 侯磊, 左官抒, 侯升亮, 等. 滚动轴承动-静态刚度检测装置及方法: CN202110389138.5[P]. 2021-04-12.
- HOU Lei, ZUO Guanshu, HOU Shengliang, et al. Dynamic and static stiffness detection device and method for rolling bearing: CN202110389138.5[P]. 2021-04-12.
- [13] NOEL D, RITOU M, FURET B, et al. Complete analytical expression of the stiffness matrix of angular contact ball bearings[J]. Journal of tribology, 2013, 135(4): 041101.
- [14] CHEN R L, XU F, LIU G Z, et al. Stiffness characteristics and experimental study of angular contact ball bearings considering the influence of rotational speed[J]. Advances in mechanical engineering, 2024, 16(9): 1-11.
- [15] 丁长安, 周福章, 朱均, 等. 滚道控制理论与滚动体姿态角的确定[J]. 机械工程学报, 2001, 37(2): 58-61.
- DING Chang'an, ZHOU Fuzhang, ZHU Jun, et al. Raceway control assumption and the determination of rolling element attitude angle[J]. Chinese journal of mechanical engineering, 2001, 37(2): 58-61.
- [16] FANG B, ZHANG J H, YAN K, et al. A comprehensive study on the speed-varying stiffness of ball bearing under different load conditions[J]. Mechanism and machine theory, 2019, 136: 1-13.
- [17] 张进华, 方斌, 朱永生, 等. 基于球-滚道非完全接触状态下的球轴承载荷分布计算及刚度特性研究[J]. 机械工程学报, 2020, 56(9): 73-83.
- ZHANG Jinhua, FANG Bin, ZHU Yongsheng, et al. Investigation of the load distribution and stiffness characteristic of ball bearing under ball-raceway separation condition[J]. Journal of mechanical engineering, 2020, 56(9): 73-83.

Data and model driven dynamic stiffness testing method for rolling bearings and experimental study

LI Yeteng¹, DUAN Jiwei¹, REN Zhijun², ZHU Yongsheng¹, Hong Jun¹

(1. Key Laboratory of Education Ministry for Modern Design & Rotor-Bearing System, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi 710049, China; 2. Frontier Institute of Science and Technology, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi 710049, China)

Abstract: The dynamic stiffness of traction motor bearings directly affects the dynamic performance and operational stability of rail transit rotor systems. To address the limitations of existing testing methods in balancing multi-condition measurement and nonlinear feature extraction, this paper proposes a data- and model-driven method based on measured data and theoretical models for high-precision testing of rolling bearings' dynamic stiffness. Firstly, based on the analytical theory of the rolling bearing stiffness matrix, a five-degree-of-freedom quasi-static model was established to systematically consider nonlinear factors such as centrifugal force, gyroscopic moment, and contact deformation. Secondly, a dynamic stiffness test rig for bearings was independently developed to achieve high-precision synchronous measurement of bearing displacement and applied force under continuously variable load conditions. Thirdly, a parameter optimization objective function integrating measured data and theoretical models was constructed, and an intelligent optimization algorithm was employed to identify key parameters defining the bearing structural characteristics. Finally, the accurate solution of the bearings' dynamic stiffness was obtained through the analytical model. Experimental results indicate that the bearings' dynamic stiffness exhibits a significant "stiffness softening" phenomenon with increasing speed; the axial dynamic stiffness increases markedly with increasing axial load, while the radial dynamic stiffness shows a relatively weak trend of variation with increasing radial load. The proposed method effectively overcomes the traditional linear fitting's limitation of ignoring nonlinear characteristics, providing an important theoretical basis and experimental support for the dynamic design and operational stability assessment of traction motor rotor systems.

Keywords: traction motor; rolling bearing; dynamic stiffness; data and model driven; parameter identification